Fehlerrechnung

Regeln:

Bei Summen und Differenzen werden die absoluten Fehler addiert.

Bei Produkten und Quotienten werden die relativen Fehler addiert.

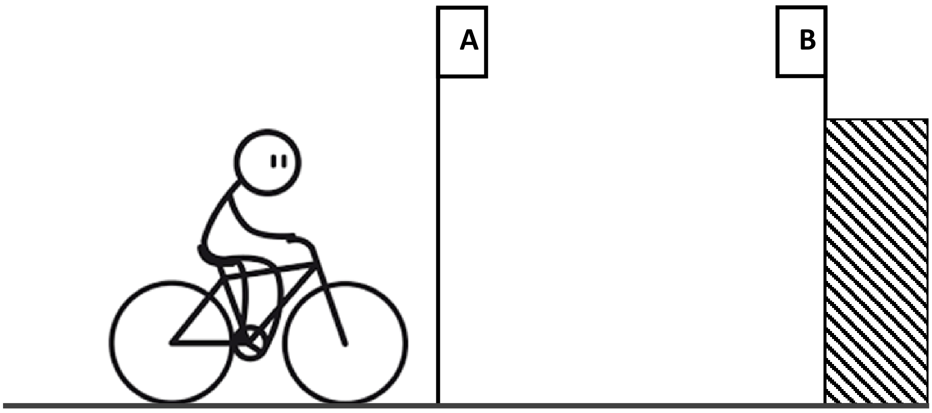
Bei komplizierteren funktionalen Zusammenhängen $y = f(x_1, x_2)$ werden die partiellen Ableitungen gebildet und es gilt für den absoluten Fehler:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2$$

Der absolute Fehler wird auf eine Stelle gerundet. Ausnahme: Diese Stelle ist eine „1“, nur dann darf die zweite Stelle mit angegeben werden.
Das Ergebnis wird auf so viele Dezimalstellen gerundet, wie der absolute Fehler hat.

Beispiel: „Crashtest für Radfahrer“

Versuchsanordnung:



Ein Radfahrer fährt mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegen eine Wand.
Wie groß ist seine Aufprallenergie?

Sie haben eine Waage (Anzeige ±100 g), um den Radfahrer samt Fahrrad zu wiegen, ein Bandmaß mit cm-Einteilung, um die Strecke A-B zu messen, und eine Stoppuhr mit Zehntel-Sekunden-Skala.

Messwerte: m = 95,7 kg, Strecke A-B = 1,41 m, Zeit = 1,15 s

Berechnung:

Strecke A-B: Ablesewert A – Ablesewert B, geschätzter Ablesefehler: ±0,5 cm
Zwei Ablesungen, Differenz, die absoluten Fehler werden addiert: $\Delta(A\text{-}B) = \Delta A + \Delta B$
Weg *s* ⇨ Strecke A-B = (1,41 ±0,01) m, rel. Fehler $\Delta s/s$ = 0,01/1,41 = 0,7 %.

Zeit t: geschätzter Ablese-/Messfehler: ±0,1 s
Zeit *t* ⇨ 1,2 ±0,1 s, $\Delta t/t$ = 0,1/1,2 = 8,3 %.

Geschwindigkeit $v = s/t$: Die Geschwindigkeit wird berechnet, sie ist ein Quotient, also die relativen Fehler von Weg und Zeit addieren:
v = s/t ⇨ v = 1,41 m / 1,15 s (es werden die Original-Werte eingesetzt, gerundet wird am Ende) v = 1,226 m/s. Relativer Fehler: $\Delta v/v = \Delta s/s + \Delta t/t$ ⇨ $\Delta v/v$ = 0,7 % + 8,3 % = 9,0 %.
Absoluter Fehler ⇨ 9,0 %.· 1,226 m/s ⇨ Δv = 0,11034 m/s, gerundet 0,11 m/s.
Das Ergebnis wird entsprechend dem absoluten Fehler gerundet angegeben:
v = (1,23 ±0,11) m/s.

Nun wird die **kinetische Energie** entsprechend $E_{kin} = ½\, m\, v^2$ berechnet:
E_{kin} = ½ · 95,7 kg · 1,226² (m/s)² ⇨ E_{kin} =71,92 kg m² / s² =71,92 kg Nm / kg = 71,92 J.

Absoluter Fehler: $\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial E}{\partial v}\right| \Delta v$ ⇨ $\Delta E = \left|\frac{v^2}{2}\right| \Delta m + |mv| \Delta v$.

⇨ $\Delta E = \left|\frac{1{,}226^2\,(\mathrm{m/s})^2}{2}\right| 0{,}1\,kg + \left|95{,}7\,kg \cdot 1{,}226\ m/s\right| 0{,}11\,m/s$

= 0,08 kg m² / s² + 12,91 kg m² / s² = 12,99 kg m² / s² = 12,99 J, gerundet 13 J.

E_{kin} =(72 ±13) J, $\Delta E_{kin} / E_{kin}$ = 18 %.

Anmerkung: *Die Fehlerrechnung ist plausibel, da der Gesamtfehler größer sein muss als alle ihn beeinflussenden relativen Fehler zusammen.*

Um das Ergebnis genauer zu ermittelten, muss man den größten Einzelfehler (Zeitmessung) verbessern. Hier würden entweder apparative Veränderungen (z. B. eine Lichtschranke oder eine „Radarpistole“ zur direkten Geschwindigkeitsmessung) helfen, oder man wiederholt die Zeitmessung mehrfach und wertet den Fehler statistisch aus:

Bei statistischer Fehlerauswertung werden der Mittelwert und die Standardabweichung aus n Messwerten ermittelt:

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x_i$, Standardabweichung: $S = \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{x}-x_i)^2}{n-1}}$

Der mittlere statistische Fehler des Mittelwerts ergibt sich nun aus: $\Delta \bar{x} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

In unserem Beispiel muss der Fahrradfahrer 9x den Versuch wiederholen  .

Es ergeben sich folgende Werte:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{t}$
t / s	1,2	1,1	1,2	1,3	1,2	1,3	1,1	1,3	1,2	10,9/9

Der Mittelwert beträgt 10,9/9 = 1,211 s.
Es ergibt sich eine Standardabweichung S = 0,078 s.

Der mittlere statistische Fehler des Mittelwerts beträgt: $\Delta\bar{t} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ ⇨ $\Delta\bar{t} = \frac{0{,}078s}{\sqrt{9}}$

⇨ $\Delta\bar{t}$ = 0,026 s, gerundet $\Delta\bar{t}$ = 0,03 s.

Zeit *t* ⇨ 1,21 ±0,03 s, *Δt/t* = 0,03/1,21 = 2,5 %.

Geschwindigkeit: $\Delta v/v = \Delta s/s + \Delta t/t$ ⇨ $\Delta v/v$ = 0,7 % + 2,5 % = 3,2 %, v = (1,23 ±0,04) m/s

Absoluter Fehler der **kinetischen Energie**:

⇨ $\Delta E = \left|\frac{1{,}226^2\,(\mathrm{m/s})^2}{2}\right| 0{,}1\,kg + \left|\,95{,}7\,kg \cdot 1{,}226\ m/s\,\right| 0{,}04\,m/s$ = 0,08 J + 4,69 J = 4,77 J,

gerundet 5 J.

E_{kin} =(72 ±5) J, $\Delta E_{kin} / E_{kin}$ = 7 %.

Mit zunehmender Zahl n der Messwerte wird der mittlere statistische Fehler immer kleiner, *aber ob man das dem armen Radfahrer weiter zumuten kann…*